théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions de $\{0, ..., n\}$, $B_0 = 1$. Alors*

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Démonstration. *Voyons que $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. En effet pour $k \in \{1, ..., n\}$ on considère E_k l'ensemble des partitions de $\{1, ..., n+1\}$ contenant $n+1$ de cardinal $k+1$. $Card(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}$. En effet il faut choisir les k autres éléments qui seront avec $n+1$puiis compter le nombre de partitions des $n-k$ élments restants.$E_0, E_1, ..., E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $\{1, ..., n+1\}$ d'où*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Voyons que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence non-nul. Voyons par recurrence que $B_n \leq n!$. C'est vrai pour $n = 0$ supposons le resultat vrai jusqu'a un certain rang n.

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \\
&\leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \\
&\leq (n+1)!
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{B_n}{n!} \leq 1$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ à un rayon de convergence $R \geq 1$. On note $f(x)$ sa somme sur $]-R, R[$

$f(x)$ est dérivable et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= e^x f(x)
\end{aligned}$$

f est donc solution du problème $\left\{ \begin{array}{lcl} f'(x) - e^x f(x) & = & 0 \\ f(0) & = & 1 \end{array} \right.$ dont la solution est $x \to Ce^{e^x}$ et comme $f(0) = 1$ on a $C = \frac{1}{e}$. Ainsi $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$

Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{xn}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xn)^k}{k!}$$

Voyons que la série double définie par $u_{n,k} = \frac{(xn)^k}{n!k!}$ *est sommable.*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|u_{n,k}| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|nx|^k}{n!k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{|nx|}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{|x|})^n}{n!} = e^{e^{|x|}}$$

Ainsi par Fubini on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{n!k!} \\ &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{n!k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}\right)\frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de f *on a*

$$B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$$